

# NEKONEČNO V TEOLÓGII, FILOZOFII A MATEMATIKE

PAVOL ZLATOŠ

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky,  
Univerzita Komenského, Bratislava

Fascinácia nekonečnom, ako niečím, čo nás priamo zo svojej podstaty zásadne presahuje a vymyká sa možnostiam zmyslového vnímania aj myšlienkového chápania, sprevádza ľudstvo od počiatkov jeho kultúrnych dejín až po dnešok. Vo vedeckej diskusii budeme hovoriť o vplyve niektorých náboženských predstáv na vývoj predstáv o nekonečne, no taktiež na vznik a vývoj vedeckého pohľadu na svet a novovekej európskej vedy ako celku. Ďalej budeme diskutovať o jave obzoru a s ním súvisiacou podobou nekonečna, ktoré nazývame prirodzeným nekonečnom, na rozdiel od absolútneho nekonečna, čerpajúceho svoje oprávnenie z istých teologických výkladov. Taktiež sa pokúsime o rozlíšenie tzv. potenciálneho a aktuálneho nekonečna a poukážeme na niektoré paradoxy a logické spory, ku ktorým v matematike vedie snaha vykladať si nekonečno ako završené (t. j. aktuálne). Napokon naznačíme základné myšlienky Bolza-novho a Cantorovho prístupu k nekonečným množinám, ako aj spôsob, akým sa axiomatická teória množín spomínaným sporom vyhýba.

## Čo je to nekonečno?

- Niečo, čo nás zásadne presahuje, čo sa vymyká našim i akýmkoľvek možnostiam uchopenia zmyslovým vnímaním aj myslením.
- Rôzne podoby nekonečna:
  - nekonečné množstvo (počet),
  - nekonečná veľkosť (dĺžka, vzdialenosť, plošný obsah, objem),
  - nekonečno čo do intenzity (nekonečná sila, rýchlosť, ale tiež rôzne pocity)
- Existuje vôbec niečo také?

## Problém existencie v matematike

- Existujú napr. body, úsečky, priamky a iné geometrické útvary?
- Existujú čísla: konkrétne čísla (1, 2, 3, 4, 5, ... , 427, ... ), prirodzené čísla, 0, záporné čísla, racionálne, iracionálne, imaginárne...?
- V bežnom slova zmysle zrejme nie, ale už sme si na ne zvykli.

⇒ Aj nekonečnu možno priznať existenciu, pokiaľ o ňom možno bezosporne uvažovať.

- Ale to je práve problém – nekonečno totiž presahuje naše možnosti.
  - Príklad: Spor s Euklidovou axiómou „celok je vždy väčší ako jeho časť“. (Galileo)

## Apeiron

- Starí Gréci uvažujú o nekonečne ako o *apeiron*, t. j. niečom neurčitom, neuchopiteľnom a zahmlenom, do čoho sa niekde na obzore rozplýva svet určitých a pevných tvarov. O tom, čo je ďalej nevieme nič, o tom si len môžeme rozprávať rôzne báje.
- O *apeiron* nie je možná žiadna určitá, objektívna veda.
- Hoci nekonečno sa objavuje v úvahách antických filozofov, starogrécka matematika sa nekonečnom nezaoberá.
- V antickej geometrii nie sú napr. ani priamky ale len úsečky (ktoré možno zakaždým predĺžiť o ľubovoľný, no vždy len konečný úsek)

## Nekonečno ako opak konečného

- Nekonečno sa tradične vo filozofii i v matematike chápe ako negatívna kategória; nekonečné je to, čo nie je konečné.
- Ak teda chceme vyložiť jav *nekonečna*, či ho dokonca skúmať matematickými prostriedkami, musíme si najprv vyjasniť, na základe čoho prehlasujeme niektoré javy za *konečné*.
- Konečné je teda to, čo má koniec; aby sme však mohli niečo oprávnene prehlásiť za konečné, musíme to najprv v jeho konečnosti uchopiť, to znamená i tento koniec uvidieť.
- Ponúkajú dva zásadne odlišné prístupy.

## Obzor a prirodzené nekonečno

- Každý náš pohľad, nech ho vedieme ktorýmkoľvek smerom, je – pokiaľ mu nestojí v ceste nejaká pevná prekážka, ktorá ho ostro ukončuje – ohraničený *obzorom*, smerom ku ktorému sa jasnosť nášho pohľadu vytráca, a čo je za týmto obzorom, to už nevidíme vôbec.
- Tak je tomu nielen pri pohľade do diaľky, t. j. smerom k čoraz väčším vzdialenostiam, keď sa pred nami otvára obzor dosiahnuteľnosti, no i pri pohľade smerom do hĺbky, t. j. k vzdialenostiam čoraz menším, keď sa pred nami vynára obzor rozlíšiteľnosti nášho pohľadu.
- Čo obsiahneme jediným pohľadom pred obzorom ohraničujúcim jasnosť nášho pohľadu, môžeme oprávnene prehlásiť za konečné.
- Ak si javy, ubiehajúce až k tomuto obzoru, vyložíme ako nekonečné, hovoríme o takzvanom *prirodzenom nekonečne*.
- Obzoru však nerozumieme ako hranici sveta, ale ako hranici nášho pohľadu na svet.
- Obzor nie je vo svete pevne umiestnený, ale zaostrením pozornosti ho môžeme oddialiť, prípadne jej otupením sa k nám priblíži.
- Svetu teda rozumieme tak, že plynule pokračuje aj za obzorom, hoci tam ho práve nevidíme.
- Ukazujúci sa obzor je tak javom neostrým, a nie je javom samotného objektívneho sveta, lež javom sprevádzajúcim náš pohľad na svet, teda javom subjektívnym.
- Z toho tiež vyplýva, že to, čo sa nám pri nejakom pohľade javí ako prirodzene nekonečné, môže sa po zaostrení tohto pohľadu dostať celé pred obzor, teda javiť sa konečným (a tiež naopak).

## Absolútne nekonečno

- Takýto prístup k štúdiu nekonečna je nezlučiteľný so statusom klasickej objektívnej vedy.
- Pri klasickom objektivistickom prístupe sa nestaráme o to, akým sa nám niečo javí, ale o to, aké to „samo osebe“ teda „objektívne ako také“ je.
- Špeciálne nám nejde o to, či sa nám niečo javí ako konečné, t. j. leží práve pred obzorom, ale o to, či je to naozaj, raz a navždy, objektívne konečné.
- *Absolútne nekonečným* nazývame to, čo nie je v takomto zmysle konečné.



## Neodstrániteľnosť obzoru

- Na druhej strane, nech akokoľvek oddialíme obzor nášho pohľadu, teda prekročíme do vtedajší obzor, obzor ako taký sa nám prekonať nepodarí.
- Náš ďalej dosahujúci či hlbšie prenikajúci pohľad bude opäť ubiehať k tomuto vzdialenejšiemu obzoru.
- Samotný jav obzoru, na rozdiel od jednotlivých výskytov tohto javu, je teda javom navýsosť objektívnym.
- Objektívna prirodzená nekonečnosť sveta spočíva práve v nemožnosti prekonať v ktoromkoľvek smere takto poňatý jav obzoru, to znamená v nemožnosti vylúčiť subjektívne prirodzené nekonečno.
- Ak si túto objektívnu prirodzenú nekonečnosť sveta vyložíme ako absolútne nekonečnú, budú nositeľmi absolútneho nekonečna jedine javy ubiehajúce „až na samý kraj sveta“, teda za všetky pomyselné obzory.
- No nemožnosť prekonať obzor robí tiež nemožným o čomkoľvek overiť, že je to „objektívne“ absolútne nekonečné. Absolútnu nekonečnosť teda môžeme niektorým javom iba priznať na základe nejakého výkladu.

## Teologické oprávnenie absolútneho nekonečna

- Ak sa teda chceme vyhnúť agnostickému záveru o principiálnej nemožnosti poznať absolútne nekonečno, musíme vypracovať nejaký kanonický výklad tohto pojmu, ktorému by sme pred všetkými ostatnými dali prednosť.
- Na také niečo sa v našom kultúrnom priestore cíti povolaná len kresťanská teológia.
- Tradične bola totiž aktuálna absolútna nekonečnosť ako atribút pripisovaná výlučne Bohu (hlavne pokiaľ ide o mieru Jeho Múdrosti, Moci, Dobroty a Milosti).
- Zatiaľ všetky stvorené súcna vrátane človeka (a tým aj jeho schopnosti), bez toho, že by bolo jasné, čo to znamená, boli prehlásené za konečné.
- Celok stvoreného bol zvyčajne chápaný ako potenciálne (opäť absolútne) nekonečný, lebo i moc a možnosti (potencie) Stvoriteľa sú nekonečné.
- Aktuálnu nekonečnosť sveta prehlásil a teologickými argumentmi zdôvodňoval napr. Giordano Bruno. (a hoci to zrejme nebol jediný dôvod, všetci vieme, ako skončil).

- Teologické motivácie skutočne zohrali významnú úlohu pri vypracúvaní výkladu absolútneho nekonečna.
- Umožňujú nám totiž naše nedokonalé, ohraničené, a tým nutne i konečné poznávanie oprieť o nekonečné poznanie dokonalej, vševedúcej a všemohúcej bytosti, a tak mu zaručiť akýsi status objektívnosti.
- Teda rozumom môžeme postupne poznávať to, čo Boh obsiahne jediným pohľadom.
- Výklad absolútneho nekonečna teda vypracúvame tak, že sa pokúšame vmyslieť do situácie, v ktorej by sme svet videli „Božími očami“.
- V tej chvíli však presne v zhode s Feuerbachovým rozborom podvedome začíname „tvoriť Boha na svoj obraz“.
- Teda náš Boh vidí celý svet tak, ako my vidíme svet pred obzorom, čím obzor oddľujeme až do absolútneho nekonečna a absolútnemu nekonečnu podsúvame atribúty nekonečna prirodzeného.

## Potenciálne a aktuálne nekonečno

- V zhode s naším porozumením pre obzor si javy ubiehajúce k obzoru vykladáme ako plynule pokračujúce ešte aspoň kúsok za obzorom.
- Naše porozumenie pre prirodzené nekonečno je teda porozumením pre nekonečno uskutočnené, t. j. *aktuálne*.
- Chápať prirodzené nekonečno ako *potenciálne* môžeme leda dovtedy, kým nedôjde k oddialeniu príslušného obzoru.
- Aktualizácia potenciálneho prirodzeného nekonečna tak tesne súvisí s oddialením obzoru, čím sa však pôvodne nekonečné dotvára a stáva konečným.
- Naproti tomu k abstrakcii absolútneho nekonečna dospievame postupným a opätovným oddaľovaním obzoru.
- Absolútne nekonečno je tak myslenou medzou, kam až môžeme obzor oddialiť.
- Oddialením obzoru sa však samotného obzoru nijako nezbavíme, preto absolútne nekonečno vystupuje pred nami v podobe potenciálnej, ani nie tak ako medza, lež iba ako číra možnosť stále ďalšieho oddaľovania obzoru.

- Snaha o aktualizáciu absolútneho nekonečna tak nie je ničím iným, než snahou o rozšírenie takéhoto výkladu nekonečna prirodzeného aj na absolútne nekonečno.
- Na prvý pohľad sa môže zdať, že teologickým prístupom hravo zvládneme i tento problém, lebo tak, ako sme my schopní uchopiť prirodzené nekonečno v jeho uskutočnení, dokáže Boh uchopiť nekonečno absolútne.
- Keď sa však pokúsime aplikovať našu úvahu o oddialení obzoru na celý svet, presnejšie „kraj sveta“, zistíme, že aktualizácia absolútneho nekonečna núti Boha najprv vystúpiť zo sveta von, niekam do zászvetia.
- Potom však svet pred Božím pohľadom neubieha podobne, ako nám ubieha k obzoru viditeľná časť sveta, ale leží pred ním tak povediac ako na dlani, podobne ako pred nami leží nejaký konečný jav.
- Aktualizáciou absolútneho nekonečna teda na toto nekonečno neprenášame atribúty prirodzeného nekonečna, ale atribúty konečna.

Aktuálne nekonečno je tak abstrakciou značne ošemetnou a chýlostivou, pokúšajúcou sa v sebe stmeliť znaky prirodzeného nekonečna so završenosťou bez toho, aby ho tým zvrátilo v konečno. Potom sa však stáva načisto nejasným, aké znaky má aktuálne nekonečno podediť od prirodzeného nekonečna a aké od konečna. Niet sa teda čo diviť, že aktuálne absolútne nekonečno dalo podnet k toľkým sporom. Všetky tieto spory však už prebiehali bez prihliadnutia k nekonečnu prirodzenému. Pod nekonečnom sa totiž v matematike odvtedy až podnes rozumelo takmer výlučne to, čo tu nazývame nekonečnom absolútnym. A tak sa celá diskusia okolo nekonečna v matematike sústredila na otázku z nášho pohľadu druhoradú – na otázku oprávnenosti jeho aktualizácie.

## Bernard Bolzano

- *Paradoxien des Unendlichen* (1848) – prvý systematický náčrt teórie nekonečných množín.
- Základnou podobou javu nekonečna je nekonečné množstvo jednotlivých objektov.
  - Každý výskyt javu nekonečna je vyvolaný nejakou nekonečnou množinou alebo ho aspoň dodatočne možno takouto množinou podložiť.
- Eistujú aktuálne nekonečné množiny.
  - Teologický dôkaz: množina všetkých právd o sebe je nekonečná a aktuálne existuje v mysli Božej.
- Nekonečnú množinu možno vzájomne jednoznačne zobrazit' na jej vlastnú časť.
- Ľubovoľné dve nekonečné množiny možno na seba vzájomne jednoznačne zobrazit'.

## Georg Cantor

- Zakladateľ teórie množín, ktorá sa podnes rozvíja takmer výlučne v jeho poňatí.
- Cantorov vymedzovací princíp: k ľubovoľnej „rozumnej“ vlastnosti  $V(x)$  existuje množina  $\{x \mid V(x)\}$ .
- Russellov paradox: potom existuje množina  $R = \{x \mid x \text{ je množina a } x \notin x\}$ ;
  - pre tú platí  $R \in R \Leftrightarrow R \notin R$  (paradox vojenského holiča).
- Nevyhnutná kritická revízia povolených princípov tvorby množín vedie k rôznym axiomatickým systémom teórie množín (Zermelo-Fraenkel, Gödel-Bernays,...).
- Axióma potenčnej množiny a Cantorova veta  $X \prec \mathcal{P}(X)$  má za následok existenciu nekonečne mnohých typov nekonečných množín.
  - Špeciálne reálnych čísel resp. podmnožín množiny prirodzených čísel je „viac“ než prirodzených čísel.
  - Protirečí Bolzanovmu princípu ekvivalencie všetkých nekonečných množín.
  - Na druhej strane strana štvorca a plný štvorec obsahujú „rovnako veľa“ bodov.
- Obor všetkých nekonečných kardinálnych čísel nie je množinou (t.j. nie je aktualizovateľný).
  - Predstavuje „potenciálne supernekonečno.“